**Делимость и остатки**

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Приведём некоторые из них.

* Каждое целое число а можно разделить на натуральное число m с остатком, то есть представить в виде а = mq + r, где q и r – целые числа и r (остаток) не меньше 0, но меньше q.
* Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m.
* Различные натуральные числа при делении на натуральное m могут давать любой из остатков 0, 1, 2, ..., m–1. Однако степени натуральных чисел с фиксированным натуральным показателем n>1 не обязательно снова могут давать при делении на m любой из этих остатков. Так при делении на 3, 4, 5 и 8 четвёртые степени целых чисел могут давать остатки только 0 и 1. Ниже приведена таблица возможных остатков при делении квадратов, кубов, четвертых и пятых степеней на числа от 3 до 10.
* Если два числа а и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что а сравнимо с b по модулю m. Записывают это так



* Если a > b, то наибольший общий делитель a и b равен наибольшему общему делителю a – b и b.
* Если а и b – натуральные числа и а = bq + r (r – остаток), то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

а = bq + r,  b = rq1 + r1,  r = r1q2 + r2,  r1 = r2q3 + r3,  . . .  ,  rn = dqn+2

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа х и у, такие, что d = ах + by. В частности, если числа а и b взаимно просты, то есть не имеют общих делителей, больших 1, то существуют целые х и у, для которых ах + by = 1.

* Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых чисел (основная теорема арифметики).
* Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых чисел, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.
* Если числа b1, b2, … , bn попарно взаимно просты, то для любых остатков r1, r2, … , rn (ri меньше bi) найдется число а, которое при делении на bi дает остаток ri (китайская теорема об остатках).

**Примеры решения задач**

1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Решение: Вычёркиваем из 999 чисел, меньших 1000, числа, кратные 5: их [999/5]=199. Далее вычёркиваем числа, кратные 7: их [999/7]=142. Но среди чисел, кратных 7, имеется [999/35]=28 чисел, одновременно кратных 5; они будут вычеркнуты дважды. Итого, нами должно быть вычеркнуто 199+142–28=313 чисел. Остаётся 999–313=686.

Ответ: 686 чисел.

2. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

Решение: Если счастливый билет имеет номер А, то билет с номером В=999999–А также счастливый, при этом А и В различны. Поскольку А+В=999999=1001·999=13·77·99 делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

3. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

Решение: Любое целое число при делении на 8 имеет остатком одно из следующих восьми чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, поэтому квадрат целого числа имеет остатком при делении на 8 одно из трёх чисел 0, 1, 4. Чтобы при делении на 8 сумма квадратов трёх чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо один из квадратов, либо все три при делении на 8 имеют нечётные остатки.

В первом случае нечётный остаток есть 1, а сумма двух чётных остатков равна 0, 2, 4, то есть сумма всех остатков равна 1, 3, 5. Остатка 7 в этом случае получить нельзя. Во втором случае три нечётных остатка это три 1, и остаток всей суммы равен 3. Итак, 7 не может быть остатком при делении на 8 суммы квадратов трёх целых чисел.

4. Докажите, что при любом натуральном n:

  а) число 55n+1 + 45n+2 + 35n делится на 11.

  б) число 25n+3 + 5n·3n+2 делится на 17.

Решение: а) Первоначально выполним следующее преобразование заданного выражения:

 55n+1+45n+2+35n = 5(3125)n + 16(1024)n + (243)n = 5(11·284+1)n + 16(11·93+1)n + (11·22+1)n.

Можно записать: (х+1)n = Ах+1, где А – некоторое целое число при целых х. Тогда приведённое выше выражение принимает вид 11В+5+16+1 = 11С, очевидно делящееся на 11, где В и С – некоторые целые числа.

б) Выполним следующие преобразования, из которых следует доказываемое утверждение:

 25n+3 + 5n·3n+2 = 8·32n + 9·15n = 8(17+15) n + 9·15n = 17А + 8·15n + 9·15n = 17А + 17·15n = 17В,

где А, В – целые положительные числа.

**Задания для самостоятельного решения**

1. Докажите, что $n^{3}$ + 2n делится на 3 для любого натурального n.
2. Какой цифрой оканчивается число $3^{2021}$
3. а) a + 1 делится на 3. Докажите, что 4 + 7a делится на 3.

б) 2 + a и 35 – b делятся на 11. Докажите, что a + b делится на 11.

1. Докажите, что при любом натуральном n:

а) число 4n + 15n – 1 делится на 9;

б) число 32n+3 + 40n – 27 делится на 64;

в) число 5n(5n + 1) – 6n(3n + 2n) делится на 91.

1. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.
2. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.
3. Докажите, что сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть точным квадратом.
4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.
5. Найдите такое простое число х, при котором числа 4х²+1 и 6х²+1 были бы оба простыми.
6. Докажите, что:

а) если х2+у2 делится на 3 и числа х, у целые, то х и у делятся на 3;

б) если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих чисел делится на 6;

в) если p и q простые числа и p>3, q>3, то p2–q2 делится на 24.