Инвариант

Инвариант – это математическая величина или математическое свойство, которое остается постоянным, то есть не изменяется при некоторых преобразованиях.

В качестве инварианта может использоваться четность, остаток от деления на какое-то число, знак произведения, сумма чисел, раскраски, перестановки и т.д.

Задачи (тренировочные).

1. Можно ли купюрами достоинством 5 рублей и 10 рублей набрать 2019 рублей?
2. Можно ли из квадрата размером 8 на 8 разрезанием получить прямоугольник 12 на 6?
3. На доске написаны числа 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0. Разрешается к любым двум записанным числам прибавить одно и то же натуральное число. Можно ли выполнив такую операцию несколько раз, достичь того, чтобы все записанные числа оказались равными?
4. Перед Роном лежит кучка из 100 камней. За одно действие он может разделить одну кучку на две или объединить две кучки в одну. Может ли Рон такими действиями получить 5 кучек по 25 камней?
5. Дана шахматная доска 5 на 5. Можно ли замостить доску доминошками 2 на 1?

...........................................................................................................................

Задачи

1. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между числами знаки “+” и “-” так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?
2. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 45 045?
3. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числуединицу или отнимает от него единицу. Может ли в результате получиться число 10?
4. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?
5. Серёжа и Саша играют в такую игру: они по очереди берут камешки из кучки, в которой лежит 100 камешков. За один ход каждому разрешается взять или 1 камешек, или 3. Кто из них возьмёт последний камешек, если игру начинает Сергей?
6. Гарри дрессирует шоколадную лягушку, заставляет прыгать вдоль числовой прямой. Первый прыжок лягушка совершает на 1 дм., следующий - на 2 дм., третий – на 3 дм., и т.д… 101 прыжок – на 101 дм. При этом лягушка может прыгать в любую из двух сторон. Может ли в итоге лягушка оказаться в той же точке, в которой она начинала путешествие?
7. Гарри Потер отложил одну шоколадную лягушку для следующей задачи, а остальные 24 собирается съесть. Гермиона, узнав про это, запретила тому просто так есть лягушек, а дала задание написать несколько сочинений по зельеварению и трансфигурации. За каждое сочинение по трансфигурации Гарри съедает одну лягушку, а за сочинение по зельеварению – 3шт. Через некоторое время Гарри сообщил, что написал 11 сочинений и съел всех лягушек. Может ли Гермиона верить Гарри?
8. Профессор Спейн написал на доске 3 числа: 100, 200, 2019. За одну операцию Гарри должен выбрать 2 различных числа и от большего отнять меньшее, меньшее число удвоить, а третье оставить без изменения, затем старые числа стереть. Гарри сдаст зачет, если получит на доске числа 1000; 2000; 3000. Есть ли у Гарри шанс сдать зачет?
9. Имеется набор чисел а, в, с. Данный набор чисел меняется на тройку чисел: а + в – с, в + с – а, а + с – в. Дан набор чисел 2000, 2002, 2003. Можно ли из него получить набор из чисел 2001, 2002, 2003?
10. Даны три числа: 2011,2012 и 2013. За один ход разрешается заменить числа a, b, c на числа ab/c, ac/b, bc/a. Можно ли через несколько ходов получить числа 2008,2012,2016?
11. Перед Роном лежат две кучки камней: в одной-30 шт., в другой – 70 шт. Заклинание «Добавляйтус» увеличивает количество камней в одной кучке на 6, но уменьшает количество камней в другой на 1. А заклинание «Забирайтус» уменьшает количество камней в одной кучке на 3, а в другой на 7. Оба заклинания срабатывают только в случае, когда в кучках достаточно камней, чтобы их количество можно было уменьшить. Может ли Рон такими заклинаниями получить в одной кучке 71 камень, а в другой – 53?
12. В некотором государстве было 10 банков. С момента перестройки общества все захотели стать банкирами. Но по закону открыть банк можно только путем деления уже существующего банка на 4 новых. Через некоторое время министр финансов сообщил президенту, что в стране действует 2007 банков, после чего был немедленно уволен за некомпетентность. Что не понравилось президенту?
13. Мише учитель математики поставил в дневник отметку «2». Миша, желая скрыть от мамы данный факт, порвал свой дневник на 4 части. Этого ему показалось мало, поэтому некоторые из этих частей (может быть и не все) он порвал на 4 части и т.д. Мама нашла 20 кусочков дневника. Все ли куски нашла мама?
14. Гарри, Рон и Гермиона учили новые заклинания. Перед этим они купили шоколадных лягушек и договорились, что тот, кто первым учится заклинанию, получит 5 лягущек, второй – 3, третий – 2. Через некоторое время оказалось, что у всех ребят по 25 лягушек. При этом никто не учил заклинания одновременно. Доказать, что ребята ошиблись при выдаче лягушек.
15. У Гарри, Рона и Гермионы на троих 51 шоколадная лягушка. Лягушки разделены на 3 кучки: 1-ая - 6 лягушек, 2-ая - 15 лягушек, в 3-ей - 30 лягушек. Друзья могут отдавать лягушкам такие приказы: лягушкам, оказавшимся в кучке с четным числом, поделиться на две равные кучки; объединиться двум кучкам лягушек. Отдавать другие приказы бесполезно – лягушки ребят не послушают. Могут ли ребята такими приказами разделить лягушек на 3 равные кучки?