**Делимость и остатки**

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Приведём некоторые из них.

* Каждое целое число а можно разделить на натуральное число m с остатком, то есть представить в виде а = mq + r, где q и r – целые числа и r (остаток) не меньше 0, но меньше q.
* Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m.
* Различные натуральные числа при делении на натуральное m могут давать любой из остатков 0, 1, 2, ..., m–1. Однако степени натуральных чисел с фиксированным натуральным показателем n>1 не обязательно снова могут давать при делении на m любой из этих остатков. Так при делении на 3, 4, 5 и 8 четвёртые степени целых чисел могут давать остатки только 0 и 1. Ниже приведена таблица возможных остатков при делении квадратов, кубов, четвертых и пятых степеней на числа от 3 до 10.
* Если два числа а и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что а сравнимо с b по модулю m. Записывают это так



* Если a > b, то наибольший общий делитель a и b равен наибольшему общему делителю a – b и b.
* Если а и b – натуральные числа и а = bq + r (r – остаток), то наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с остатком:

а = bq + r,  b = rq1 + r1,  r = r1q2 + r2,  r1 = r2q3 + r3,  . . .  ,  rn = dqn+2

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа х и у, такие, что d = ах + by. В частности, если числа а и b взаимно просты, то есть не имеют общих делителей, больших 1, то существуют целые х и у, для которых ах + by = 1.

* Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых чисел (основная теорема арифметики).
* Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых чисел, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.
* Если числа b1, b2, … , bn попарно взаимно просты, то для любых остатков r1, r2, … , rn (ri меньше bi) найдется число а, которое при делении на bi дает остаток ri (китайская теорема об остатках).

**Метод математической индукции.**

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции. Он заключается в следующем: некоторое утверждение справедливо для всякого натурального n, если оно справедливо для n = 1 и из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального n = k следует его справедливость для n = k+1.

То есть, доказательство по методу математической индукции проводится в три этапа:

во-первых, проверятся справедливость утверждения для любого натурального числа n (обычно проверку делают для n = 1);

во-вторых, предполагается справедливость утверждения при любом натуральном n=k;

в-третьих, доказывается справедливость утверждения для числа n=k+1, отталкиваясь от предположения второго пункта.

**Примеры решения задач**

1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Решение: Вычёркиваем из 999 чисел, меньших 1000, числа, кратные 5: их [999/5]=199. Далее вычёркиваем числа, кратные 7: их [999/7]=142. Но среди чисел, кратных 7, имеется [999/35]=28 чисел, одновременно кратных 5; они будут вычеркнуты дважды. Итого, нами должно быть вычеркнуто 199+142–28=313 чисел. Остаётся 999–313=686.

Ответ: 686 чисел.

2. Номер автобусного билета – шестизначное число. Билет называется счастливым, если сумма трёх первых цифр номера равна сумме последних трёх цифр. Докажите, что сумма всех номеров счастливых билетов делится на 13.

Решение: Если счастливый билет имеет номер А, то билет с номером В=999999–А также счастливый, при этом А и В различны. Поскольку А+В=999999=1001·999=13·77·99 делится на 13, то и сумма номеров всех счастливых билетов делится на 13.

3. Докажите, что сумма квадратов трёх целых чисел не может при делении на 8 дать в остатке 7.

Решение: Любое целое число при делении на 8 имеет остатком одно из следующих восьми чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, поэтому квадрат целого числа имеет остатком при делении на 8 одно из трёх чисел 0, 1, 4. Чтобы при делении на 8 сумма квадратов трёх чисел имела остаток 7, необходимо, чтобы выполнялся один из двух случаев: либо один из квадратов, либо все три при делении на 8 имеют нечётные остатки.

В первом случае нечётный остаток есть 1, а сумма двух чётных остатков равна 0, 2, 4, то есть сумма всех остатков равна 1, 3, 5. Остатка 7 в этом случае получить нельзя. Во втором случае три нечётных остатка это три 1, и остаток всей суммы равен 3. Итак, 7 не может быть остатком при делении на 8 суммы квадратов трёх целых чисел.

4. Докажите, что при любом натуральном n:

  а) число 55n+1 + 45n+2 + 35n делится на 11.

  б) число 25n+3 + 5n·3n+2 делится на 17.

Решение: а) Первоначально выполним следующее преобразование заданного выражения:

 $5^{5n+1}$+$4^{5n+2}$+$3^{5n}$ = 5$(3125)^{n}$+ 16($1024)^{n}$ + $243^{n}$ = 5($11·284+1)^{n}$ + 16($11·93+1)^{n}$ + ($11·22+1)^{n}$.

Можно записать: ($x+1)^{n}$ = Ах+1, где А – некоторое целое число при целых х. Тогда приведённое выше выражение принимает вид 11В+5+16+1 = 11С, очевидно делящееся на 11, где В и С – некоторые целые числа.

б) Выполним следующие преобразования, из которых следует доказываемое утверждение:

 25n+3 + 5n·3n+2 = 8·$32^{n}$ + 9·$15^{n}$ = 8$(17+15)^{n}$+ 9·$15^{n}$= 17А + 8·$15^{n}$ + 9·$15^{n}$= 17А + 17·$15^{n}$= 17В, где А, В – целые положительные числа.

**Задания для самостоятельного решения**

1. Докажите, что $n^{3}$ + 2n делится на 3 для любого натурального n.
2. Какой цифрой оканчивается число $3^{2021}$
3. а) a + 1 делится на 3. Докажите, что 4 + 7a делится на 3.

б) 2 + a и 35 – b делятся на 11. Докажите, что a + b делится на 11.

1. Докажите, что при любом натуральном n:

а) число $4^{n}$ + 15n – 1 делится на 9;

б) число $3^{2n+3}$ + 40n – 27 делится на 64.

1. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.
2. Найдите наименьшее число, дающее следующие остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.
3. Докажите, что сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть точным квадратом.
4. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.
5. Найдите такое простое число х, при котором числа 4х²+1 и 6х²+1 были бы оба простыми.
6. Докажите, что:

а) если х2+у2 делится на 3 и числа х, у целые, то х и у делятся на 3;

б) если сумма трёх целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих чисел делится на 6;

в) если p и q простые числа и p>3, q>3, то p2–q2 делится на 24.

**Решения и указания к решению.**

1. Решение: число n может давать при делении на 3 один из трех остатков: 0; 1; 2. Рассмотрим три случая:

1) Если n дает остаток 0, то $n^{3}$ и 2n делятся на 3 и поэтому $n^{3}$ + 2n так же делится на 3.

2) Если n дает остаток 1, то $n^{3}$ дает остаток 1, 2n остаток 2, а 1 + 2 делится на 3.

3) Если n дает остаток 2, то $n^{3}$ дает остаток 2, 2n – остаток 1, а 2 + 1 делится на 3.

Что и требовалось доказать.

2. Ответ: 3

3. Указания: а) 4 + 7a = 4(a + 1) + 3a; б) a + b = (2 + a) – (35 – b) + 33.

4. Указание: воспользуйтесь методом математической индукции.

а) если n=1, то $4^{1}$+15$∙$1-1=18$\vdots $9.

Предположим, что утверждение верно при n=k:$ (4^{k}$ + 15k – 1)$ \vdots $9

Проверим справедливость утверждения при n=k+1: $4^{k+1}$ + 15(k+1) – 1=

=4$∙4^{k}$ + 15k+15 – 1=4 $∙$($4^{k}$ + 15k – 1) - 45k +18.

4 $∙$($4^{k}$ + 15k – 1)$ \vdots $9, 45k$ \vdots $9, 18$ \vdots $9.

Следовательно, сделанное предположение верно для всех натуральных n.

б) докажите самостоятельно, воспользовавшись методом математической индукции.

5. Решение: пусть данные числа a, b, c, d, e, f, g, а S – их сумма. По условию числа S – a, S – b, S – c, S – d, S – e, S – f, S – g делятся на 5. Значит, и их сумма, 7S – S = 6S делится на 5. Но тогда и S делится на 5, а значит, на 5 делятся и числа a = S – (S – a), ..., g = S – (S – g)

6. Решение: заметим, что это число, увеличенное на 1, делится на 2, 3, 4, 5, 6. Ответ: 59.

7. Решение: пусть одно число (2k+1), второе - (2n+1). Тогда:

$(2k+1)^{2}$+$(2n+1)^{2}$=4k²+4k+1+4n²+4n+1=4(k²+k+n²+n)+2.

При делении данного выражения на 4 получается остаток 2. Следовательно, оно не может быть точным квадратом. (Убедитесь самостоятельно, что при делении точного квадрата на 4 в остатке могут быть только числа 0 или 1).

8. Решение: предположим противное. Пусть p1, p2, …, pn – все простые числа. Рассмотрим число p1p2 … pn + 1. Это число не делится ни на одно из чисел p1, p2, …, pn и, следовательно, не может быть разложено в произведение простых. Противоречие.

9. Ответ: 5.

10. Решение: а) Пусть х=3а+r₁, у=3b+r₂, где r₁ и r₂ – остатки от деления на 3,то есть какие-то из чисел 0, 1, 2. Тогда х²+у²=3(3а²+3b²+2аr₁+2br₂)+(r₁)²+(r₂)². Так как х²+у² делится на 3, первое слагаемое последней суммы делится на 3, то (r₁)²+(r₂)² делится на 3, что возможно, с учётом вышесказанного, только при r1=r2=0.

Таким образом, х=3а и у=3b, то есть х и у делятся на 3, что и требовалось доказать.

 б) Достаточно показать, что x3+y3+z3–(x+y+z) делится на 6. Это так и есть, ведь каждое из слагаемых x3–x, y3–y и z3–z делится на 6, поскольку

а3–а=а(а–1)(а+1) – произведение трёх последовательных целых чисел, которое обязательно делится на 2, 3, а, значит, и 6.

 в) Кратность p2–q2 числу 3 можно доказать так. При делении на 3 квадраты целых чисел дают остатки 0 или 1. Так как p и q простые числа больше 3, то p2 и q2 при делении на 3 имеют одинаковые остатки – единицу. Тогда p2–q2 делится на 3.

С другой стороны, p2–q2=(p+q)(p–q). Так как p и q нечётные и при делении на 4 имеют остатки 1 или 3, то выражение в одних скобках делится на 4, а в других – на 2, а разность квадратов p и q – на 8.

Так как p2–q2 делится на взаимно простые числа 3 и 8, то p2–q2 делится на 3·8=24, что и требовалось доказать.

 г) Пусть наибольший общий делитель чисел b и c–a равен d, b=k·d и c–a=t·d. Тогда числа k и t взаимно просты.

Далее, а·k+b·t=a·b/d+(c–a) ·b/d=c·k.

Итак, a·k+b·t делится на c.